Exámenes de Selectividad

Física. Cataluña 2022, Extraordinaria

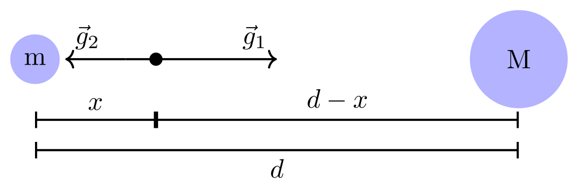
mentoor.es

Cuestión 1. Campo Gravitatorio

Entre un cuerpo de masa m y otro de masa $M > m$ (ambas puntuales) existe solo la Campo Gravitatorio. ¿Es la fuerza gravitatoria que ejerce M sobre m mayor que la que ejerce m sobre M? ¿Es la aceleración de ambos cuerpos igual en módulo? ¿Y en dirección y sentido? Razona adecuadamente las respuestas.

Solución:

Para analizar las preguntas planteadas, consideremos dos cuerpos puntuales de masas m y M, donde $M > m$, separados por una distancia r. Solo actúa el campo gravitatorio entre ellos:



Según la *Ley de la Gravitación Universal* de Newton, la fuerza gravitatoria entre dos masas puntuales está dada por:

$$F = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2},$$

donde:

- F es la magnitud de la fuerza gravitatoria,
- $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2 es la constante de gravitación universal,
- m y M son las masas de los cuerpos,
- r es la distancia entre los centros de las dos masas.

Además, según la *Tercera Ley de Newton* (Ley de Acción y Reacción): "Si un cuerpo A ejerce una fuerza sobre un cuerpo B, entonces el cuerpo B ejerce una fuerza de igual magnitud y en sentido opuesto sobre el cuerpo A". Aplicando esto a las masas m y M, se tiene:

$$\vec{F}_{M\to m} = -\vec{F}_{m\to M}.$$

Esto implica que:

$$|\vec{F}_{M\to m}| = |\vec{F}_{m\to M}|.$$

Entonces, la fuerza gravitatoria que ejerce M sobre m es igual en magnitud a la que ejerce m sobre M.

Respecto a las aceleraciones de ambos cuerpos, aplicamos la *Segunda Ley de Newton* ($\vec{F} = m \cdot \vec{a}$) a cada uno de los cuerpos, Para la masa m:

$$\vec{F}_{M\to m} = m \cdot \vec{a}_m.$$

Para la masa M:

$$\vec{F}_{m\to M} = M \cdot \vec{a}_M.$$

Dado que $|\vec{F}_{M\to m}| = |\vec{F}_{m\to M}|$, se tiene:

$$m \cdot |\vec{a}_m| = M \cdot |\vec{a}_M|.$$

Despejando las aceleraciones:

$$|\vec{a}_m| = \frac{M}{m} \cdot |\vec{a}_M|.$$

Como $M > m$, se concluye que:

$$|\vec{a}_m| > |\vec{a}_M|.$$

Es decir, la aceleración del cuerpo de masa m es mayor en módulo que la aceleración del cuerpo de masa M. En cuanto a la dirección y sentido de las aceleraciones, observamos que:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{F}_{M\to m}}{m} \quad \text{y} \quad \vec{a}_M = \frac{\vec{F}_{m\to M}}{M}.$$

Como $\vec{F}_{M\to m} = -\vec{F}_{m\to M}$, las aceleraciones serán:

$$\vec{a}_m = -\frac{\vec{F}_{m\to M}}{m} \quad \text{y} \quad \vec{a}_M = \frac{\vec{F}_{m\to M}}{M}.$$

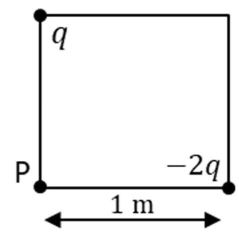
Esto implica que las aceleraciones de ambos cuerpos son opuestas en dirección y sentido.

Por lo tanto, la fuerza gravitatoria que ejerce M sobre m es igual en magnitud a la que ejerce m sobre M, pero las aceleraciones de los cuerpos no son iguales en módulo debido a sus diferencias de masa. Las aceleraciones son opuestas en dirección y sentido.

Cuestión 2. Campo Electromagnético

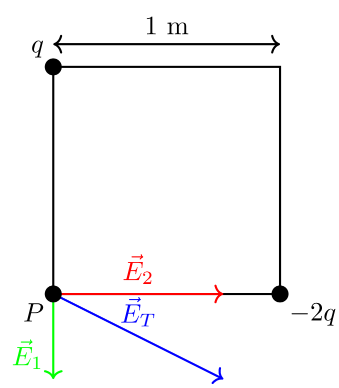
Se colocan dos cargas puntuales, q y $-2q$, en los vértices de un cuadrado de 1 m de lado, como aparece en la figura. Si $q = 2\sqrt{2}$ nC, calcula y representa claramente el vector campo eléctrico en el punto P debido a cada carga, así como el vector campo eléctrico resultante generado por dichas cargas en el punto P.

Dato: constante de Coulomb, $k = 9 \cdot 10^9$ Nm^2/C^2



Solución:

Para calcular el campo eléctrico en el punto P debido a cada una de las cargas y el campo eléctrico resultante, tenemos en cuenta el siguiente diagrama:



Para determinar el campo eléctrico en el punto P debido a las cargas q y $-2q$, utilizamos la Ley de Coulomb y el principio de superposición de campos eléctricos.

Campo eléctrico debido a la carga q ($\vec{E}_1$):

La carga $q = 2\sqrt{2}$ nC $= 2\sqrt{2} \cdot 10^{-9}$ C está ubicada a una distancia $r_1 = 1$ m de P. El campo eléctrico generado por una carga puntual se calcula mediante la fórmula:

$$\vec{E} = k \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{r},$$

donde:

- $k = 9 \cdot 10^9$ Nm^2/C^2 es la constante de Coulomb,
- Q es la carga,
- r es la distancia desde la carga hasta el punto de interés,
- $\vec{r}$ es el vector unitario en la dirección del campo eléctrico.

Aplicando los valores:

$$E_1 = k \cdot \frac{q}{r_1^2} = 9 \cdot 10^9 \; \frac{2\sqrt{2} \cdot 10^{-9}\ \text{C}}{(1\ \text{m})^2} = 18\sqrt{2}\ \text{N/C} = 25,46\ \text{N/C}.$$

La dirección de $\vec{E}_1$ es hacia abajo (negativa en el eje y) ya que la carga q es positiva.

Campo eléctrico debido a la carga $-2q$ ($\vec{E}_2$):

La carga $-2q = -4\sqrt{2}$ nC $= -4\sqrt{2} \cdot 10^{-9}$ C está ubicada a una distancia $r_2 = 1$ m de P. Aplicando la fórmula:

$$E_2 = k \cdot \frac{|-2q|}{r_2^2} = 9 \cdot 10^9 \, \frac{4\sqrt{2} \cdot 10^{-9} \text{ C}}{(1 \text{ m})^2} = 36\sqrt{2} \text{ N/C} = 50,91 \text{ N/C}.$$

La dirección de $\vec{E}_2$ es hacia la carga $-2q$ (positivs en el eje x) ya que el campo eléctrico de una carga negativa se dirige hacia la carga.

Campo eléctrico resultante en P ($\vec{E}_T$):

El campo eléctrico total en P es la suma vectorial de $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$:

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

Dado que $\vec{E}_1$ está en la dirección negativa del eje y y $\vec{E}_2$ en la dirección positiva del eje x, las componentes son:

$$\vec{E}_T = E_2 \, \vec{i} + (-E_1) \, \vec{j} = 50,91 \, \vec{i} - 25,46 \, \vec{j} \text{ N/C}.$$

La magnitud de $\vec{E}_T$ es:

$$|\vec{E}_T| = \sqrt{E_2^2 + E_1^2} = \sqrt{(50,91)^2 + (25,46)^2} = 56,93 \text{ N/C}.$$

La dirección del campo eléctrico resultante forma un ángulo θ con el eje x, calculado por:

$$\theta = \arctan\left(\frac{E_1}{E_2}\right) = \arctan\left(\frac{25,46}{50,91}\right) = 26,57°.$$

Por lo tanto, el campo eléctrico en P es $\mathbf{50,91 \, \vec{i} - 25,46 \, \vec{j}}$ N/C.

Cuestión 3. Campo Electromagnético

Por un conductor rectilíneo indefinido circula una corriente de intensidad I. Escribe y representa el vector campo magnético $\vec{B}$ en puntos que se encuentran a una distancia r del hilo. Explica cómo cambia dicho vector si los puntos se encuentran a una distancia $2r$.

Solución:

Para determinar el campo magnético $\vec{B}$ generado por un conductor rectilíneo indefinido que transporta una corriente de intensidad I, utilizamos la *Ley de Biot-Savart.* La magnitud del campo magnético $\vec{B}$ generado a una distancia r de un conductor rectilíneo indefinido que transporta una corriente I está dada por la fórmula:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r},$$

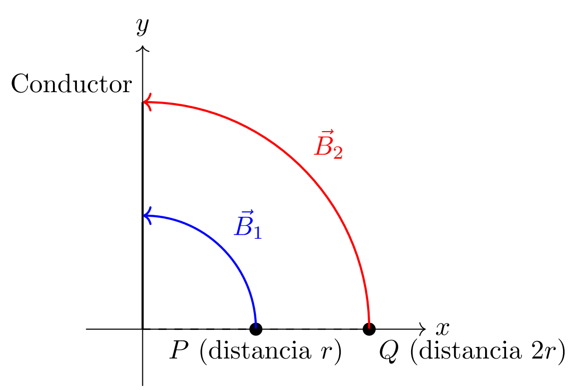
donde:

- $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ T $\cdot$ m/A es la permeabilidad del vacío,
- I es la intensidad de la corriente,
- r es la distancia perpendicular desde el conductor al punto donde se calcula el campo magnético.

La dirección del campo magnético $\vec{B}$ se determina mediante la *Regla de la Mano Derecha.* Si colocamos el pulgar de la mano derecha en la dirección de la corriente I, los dedos envolverán el conductor en la dirección del campo magnético $\vec{B}$. Si consideramos un punto a una distancia $2r$ del conductor, la magnitud del campo magnético en este punto será:

$$B' = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot 2r} = \frac{B}{2}.$$

Es decir, el campo magnético a una distancia $2r$ es la mitad del campo magnético a una distancia r. A continuación, se presenta una representación gráfica del campo magnético generado por el conductor en dos puntos diferentes, uno a distancia r y otro a distancia $2r$.



Por lo tanto, el campo magnético en un punto a distancia r del conductor es

$$\boldsymbol{\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r}},$$

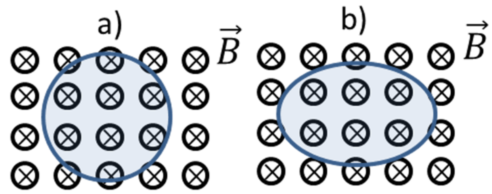
y en un punto a distancia $2r$, el campo magnético es la mitad, es decir,

$$\boldsymbol{\vec{B}' = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot 2r} = \frac{B}{2}}.$$

La dirección del campo magnético está determinada por la *Regla de la Mano Derecha.* En el dibujo, como la intensidad circula hacia arriba, es entrante.

Cuestión 4. Campo Electromagnético

Se tiene una espira circular en el interior de un campo magnético uniforme y constante como muestra la figura a). Si el área de la espira circular disminuye hasta hacerse la mitad ¿se induce corriente eléctrica en la espira? ¿En qué sentido? Si la forma de la espira pasa a ser ovalada, dejando invariante su área (figura b), ¿se induce corriente eléctrica? Escribe y explica la ley del electromagnetismo en la que te basas y responde razonadamente.



Solución:

Para determinar si se induce una corriente eléctrica en la espira bajo las condiciones descritas, aplicamos la *Ley de Faraday-Henry* y la *Ley de Lenz* del electromagnetismo.

<u>Ley de Faraday-Henry:</u>

La ley de Faraday-Henry establece que la *fuerza electromotriz (fem)* inducida en un circuito cerrado es directamente proporcional a la rapidez con la que cambia el *flujo magnético* que atraviesa el circuito. Matemáticamente, se expresa como:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

donde $\mathcal{E}$ es la fem inducida y Φ es el flujo magnético.

<u>Ley de Lenz:</u>

La Ley de Lenz complementa a la Ley de Faraday-Henry y determina la dirección de la corriente inducida. Según esta ley, la corriente inducida en un circuito cerrado siempre tiene una dirección tal que el campo magnético que genera se opone al cambio en el flujo magnético a través del circuito.

a) Disminución del área de la espira circular hasta la mitad: Cuando el área de la espira disminuye, el flujo magnético Φ a través de la espira también disminuye, ya que el flujo magnético es proporcional al área cuando el campo magnético es uniforme y constante:

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos(\alpha),$$

donde:
- B es la magnitud del campo magnético,
- S es el área de la espira,
- α es el ángulo entre el campo magnético y el vector normal a la espira.

Al reducirse el área S a la mitad, el flujo Φ disminuye a la mitad. Según la Ley de Faraday-Henry, esto genera una fem inducida $\mathcal{E}$ en la espira. La fem inducida provoca la circulación de una corriente eléctrica en la espira. Según la Ley de Lenz, la corriente inducida generará un campo magnético que se opone a la disminución del flujo magnético original. Esto significa que el campo magnético creado por la corriente inducida intentará mantener el flujo magnético constante. Aplicando la *Regla de la Mano Derecha*: si el campo magnético original apunta hacia arriba, y el flujo magnético está disminuyendo, la corriente inducida debe generar un campo magnético hacia arriba para oponerse a la disminución. Esto implica que la corriente inducida en la espira circular será *horaria*.

b) Forma ovalada de la espira manteniendo el área constante: En este caso, aunque la forma de la espira cambia de circular a ovalada, el área S de la espira permanece constante. Dado que el flujo magnético

$\Phi = B \cdot S \cdot \cos(\alpha)$ no varía (ya que B, S y α se mantienen constantes), la rapidez con la que cambia el flujo magnético es cero. Según la *Ley de Faraday-Henry*, si $\dfrac{d\Phi}{dt} = 0$, entonces la fem inducida $\mathcal{E} = 0$. Por lo tanto, no se induce una corriente eléctrica en la espira cuando solo cambia su forma a ovalada, manteniendo el área constante.

Por lo tanto, al disminuir el área de la espira circular a la mitad, se induce una corriente eléctrica en sentido horario. Sin embargo, al cambiar la forma de la espira a ovalada manteniendo el área constante, no se induce ninguna corriente eléctrica. Esto se fundamenta en la Ley de Faraday-Henry y la Ley de Lenz del electromagnetismo, que establecen que una corriente inducida se genera únicamente cuando hay una variación en el flujo magnético a través del circuito.

Cuestión 5. Ondas

Escribe la expresión del nivel sonoro (en dB) en función de la intensidad de un sonido. A una cierta distancia del punto de explosión de un petardo se mide una intensidad de 1 $\mathbf{W/m^2}$. ¿Qué nivel de intensidad en dB tendremos en este punto? Calcula la intensidad en $\mathbf{W/m^2}$ que se medirá al duplicar la distancia. (Considera que la onda sonora es esférica).

Dato: intensidad umbral de referencia $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2

Solución:

Para determinar el nivel sonoro en decibelios (dB) y cómo varía la intensidad al duplicar la distancia desde la fuente, utilizamos las siguientes consideraciones y fórmulas fundamentales de la acústica. El nivel sonoro β en decibelios se relaciona con la intensidad del sonido I mediante la siguiente expresión:

$$\beta = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right),$$

donde:

- β es el nivel sonoro en decibelios (dB),
- I es la intensidad del sonido en W/m^2,
- I_0 es la intensidad umbral de referencia en W/m^2, que en este caso es 10^{-12} W/m^2.

Calculamos el nivel sonoro en el punto con intensidad $I = 1$ W/m^2:

$$\beta = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{1\ \text{W/m}^2}{10^{-12}\ \text{W/m}^2}\right) = 120\ \text{dB}.$$

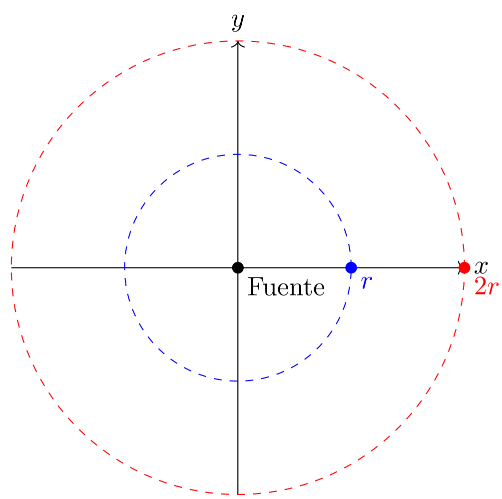
Entonces, el nivel de intensidad sonora en este punto es de 120 dB.

Considerando que la onda sonora se propaga de manera esférica, la intensidad del sonido disminuye inversamente con el cuadrado de la distancia desde la fuente. Es decir, si duplicamos la distancia, la intensidad se reduce a una cuarta parte. Matemáticamente, esto se expresa como:

$$I \propto \frac{1}{r^2}.$$

Si la intensidad original es $I_1 = 1$ W/m^2 a una distancia r, entonces a una distancia $2r$, la nueva intensidad I_2 será:

$$I_2 = \frac{I_1}{(2)^2} = \frac{1\ \text{W/m}^2}{4} = 0{,}25\ \text{W/m}^2.$$



Por lo tanto, el nivel sonoro β en decibelios se calcula mediante la fórmula

$$\beta = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right).$$

En el punto donde la intensidad es 1 W/m^2, el nivel sonoro es de 120 dB. Al duplicar la distancia desde la fuente, la intensidad del sonido disminuye a $0,25\ W/m^2$, conforme a la ley de propagación esférica de las ondas sonoras, donde la intensidad disminuye inversamente con el cuadrado de la distancia.

Cuestión 6. Óptica

Deduce la relación entre la distancia objeto, s, y la distancia focal, f', de una lente convergente para que la imagen sea invertida y con un tamaño tres veces mayor que el del objeto.

Solución:

Para determinar la relación entre la distancia objeto s y la distancia focal f' de una lente convergente que produce una imagen invertida y tres veces mayor que el objeto, utilizamos las siguientes fórmulas de óptica geométrica. El aumento lateral viene dado por:

$$A_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s},$$

donde:

- A_L es la magnificancia o aumento lateral,
- y' es la altura de la imagen,
- y es la altura del objeto,
- s' es la distancia imagen,
- s es la distancia objeto.

Dado que la imagen es invertida y tres veces mayor que el objeto, tenemos:

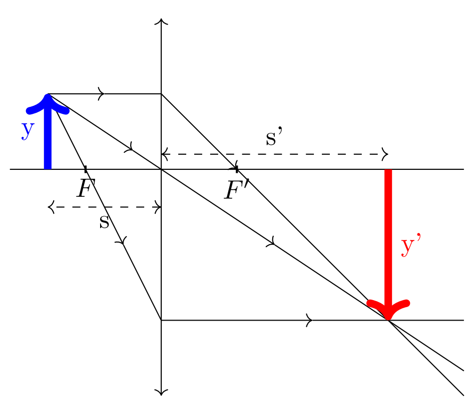
$$A_L = -3 = \frac{s'}{s} \quad \Rightarrow \quad s' = -3s.$$

La ecuación de las lentes delgadas es:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{s'} - \frac{1}{s}.$$

Sustituyendo $s' = -3s$ en la ecuación:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{-3s} - \frac{1}{s} = \frac{1+3}{-3s} = \frac{4}{-3s} \quad \Rightarrow \quad f' = \frac{-3s}{4}.$$



Por lo tanto, la relación entre la distancia objeto s y la distancia focal f' de una lente convergente que produce una imagen invertida y tres veces mayor que el objeto es:

$$\boldsymbol{f' = -\frac{3}{4} \cdot s.}$$

Cuestión 7. Óptica

En una revisión optométrica indican a una persona que, para ver bien objetos lejanos, debería ponerse una gafa de lentes de 1,5 dioptrías. Razona si tiene miopía o hipermetropía y por qué se corrige con dicho tipo de lente. Explica razonadamente el fenómeno y su corrección con ayuda de un trazado de rayos.

Solución:

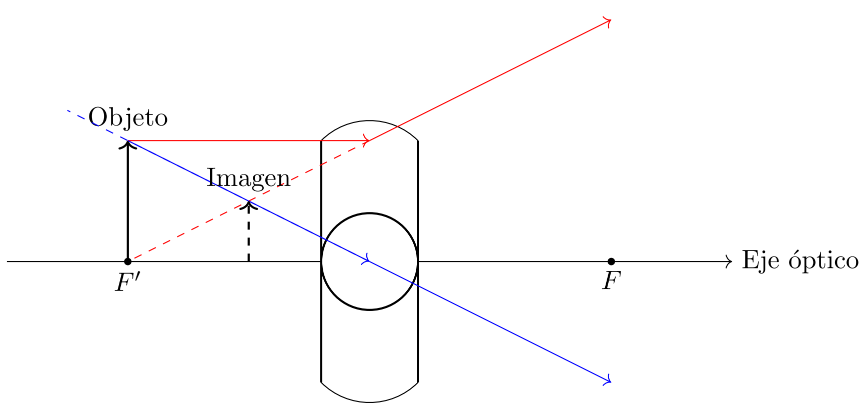
La persona mencionada presenta dificultades para ver objetos lejanos claramente, lo que indica que tiene *miopía*. La miopía es un defecto de la visión donde los rayos de luz provenientes de objetos lejanos se enfocan antes de alcanzar la retina, causando una imagen borrosa de los objetos distantes. Sin embargo, los objetos cercanos se enfocan correctamente sobre la retina, lo que permite verlos con claridad. Para corregir la miopía, se utilizan *lentes divergentes* (lentes cóncavas) que tienen una potencia negativa. En este caso, se indica que la persona debe usar lentes de $-1,5$ dioptrías. Las lentes divergentes tienen la capacidad de *dispersar* los rayos de luz antes de que entren en el ojo, lo que efectivamente **aumenta la distancia focal** del sistema óptico del ojo. Esto hace que los rayos de luz se enfoquen directamente sobre la retina, corrigiendo la visión borrosa de objetos lejanos.Recordemos que la fórmula de la potencia de la lente es:

$$P = \frac{1}{f'},$$

donde P es la potencia de la lente en dioptrías (dpt) y f' es la distancia focal de la lente en metros.. Sustituyendo los valores:

$$-1,5 = \frac{1}{f'} \implies f' = \frac{1}{-1,5} = -0,666 \text{ m}.$$

La distancia focal negativa confirma que la lente es *divergente*. A continuación, se presenta un diagrama que ilustra cómo una lente divergente corrige la miopía:



Por lo tanto, la persona presenta miopía, ya que tiene dificultad para ver objetos lejanos. Este defecto se corrige mediante el uso de lentes divergentes de potencia $-1,5$ dioptrías. Las lentes divergentes dispersan los rayos de luz, permitiendo que se enfoquen correctamente sobre la retina y, por lo tanto, mejorando la visión de objetos distantes.

Cuestión 8. Física Moderna

La energía relativista de una partícula es $3/\sqrt{8}$ veces su energía en reposo. Calcula su velocidad en función de la velocidad de la luz en el vacío, c. Si se duplica dicha velocidad, ¿se duplica su energía? Responde razonadamente.

Solución:

La energía relativista E de una partícula está dada por la fórmula:

$$E = \gamma E_0,$$

donde γ es el factor de Lorentz, definido como:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

donde v es la velocidad de la partícula y c es la velocidad de la luz en el vacío. Dado que la energía relativista es $3/\sqrt{8}$ veces la energía en reposo, tenemos:

$$E = \frac{3}{\sqrt{8}} E_0.$$

Sustituyendo en la fórmula de la energía relativista:

$$\frac{3}{\sqrt{8}} E_0 = \gamma E_0.$$

Cancelando E_0 de ambos lados:

$$\gamma = \frac{3}{\sqrt{8}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Sustituyendo γ en la definición del factor de Lorentz:

$$\frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Invertimos ambos lados:

$$\frac{4}{3\sqrt{2}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Elevamos al cuadrado ambos lados para eliminar la raíz cuadrada:

$$\left(\frac{4}{3\sqrt{2}}\right)^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{16}{18} = 1 - \frac{v^2}{c^2}.$$

Simplificamos la fracción:

$$\frac{8}{9} = 1 - \frac{v^2}{c^2}.$$

Despejamos $\frac{v^2}{c^2}$:

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}.$$

Tomamos la raíz cuadrada de ambos lados:

$$\frac{v}{c} = \frac{1}{3}.$$

Por lo tanto, la velocidad de la partícula es:

$$v = \frac{c}{3}.$$

Si duplicamos la velocidad de la partícula, la nueva velocidad v' será:

$$v' = 2v = 2 \cdot \frac{c}{3} = \frac{2c}{3}.$$

Calculamos el nuevo factor de Lorentz γ' para esta velocidad:

$$\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\left(\frac{2c}{3}\right)^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = 1,3416.$$

La nueva energía relativista E' será:

$$E' = \gamma' E_0 = 1,3416 E_0.$$

Comparando con la energía original:

$$E = \frac{3}{\sqrt{8}} E_0 = 1,06066 E_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{E'}{E} = \frac{1,3416 E_0}{1,06066 E_0} = 1,265.$$

Es decir, al duplicar la velocidad, la energía relativista de la partícula aumenta aproximadamente un $26,5\%$, pero *no se duplica.*

Por lo tanto, la velocidad de la partícula es $c/3$. Si se duplica esta velocidad a $2c/3$, la energía relativista de la partícula aumenta en un $26,5\%$, por lo que no se duplica su energía. Esto se debe a la naturaleza no lineal del factor de Lorentz en la ecuación de la energía relativista, donde el incremento en la velocidad resulta en un aumento menos que proporcional en la energía.

Problema 1. Campo Gravitatorio

Syncom 3 fue un satélite de telecomunicaciones de masa 40 kg, que describía órbitas circulares a una altura de 35800 km sobre la superficie terrestre.

a) **Deduce la expresión de la velocidad orbital de un satélite y calcula el valor en este caso, así como el periodo de la órbita (en horas).**
b) **Calcula las energías potencial y cinética del satélite en su movimiento por dicha órbita. Calcula la energía que se debe aportar al satélite para que se sitúe en una órbita en la que su energía mecánica sea $E = -9,5 \cdot 10^7$ J.**

Datos: constante de gravitación universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2; masa de la Tierra, $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg; radio de la Tierra, $R_T = 6,4 \cdot 10^6$ m

Solución:

a) **Deduce la expresión de la velocidad orbital de un satélite y calcula el valor en este caso, así como el periodo de la órbita (en horas).**

Para determinar la velocidad orbital v de un satélite que describe una órbita circular alrededor de la Tierra, igualamos la fuerza gravitatoria que actúa sobre el satélite con la fuerza centrípeta necesaria para mantener la órbita:

$$\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r^2} = \frac{m \cdot v^2}{r},$$

donde:
- G es la constante de gravitación universal,
- M_T es la masa de la Tierra,
- m es la masa del satélite,
- r es la distancia desde el centro de la Tierra hasta el satélite,
- v es la velocidad orbital del satélite.

Simplificando la ecuación, la masa m se cancela:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}.$$

Primero, determinamos la distancia r desde el centro de la Tierra hasta Syncom 3:

$$r = R_T + h = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m} + 3,58 \cdot 10^7 \text{ m} = 4,22 \cdot 10^7 \text{ m}.$$

Sustituyendo los valores en la fórmula de la velocidad orbital:

$$v = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{4,22 \cdot 10^7 \text{ m}}} = 3079,51 \text{ m/s}.$$

El periodo T de una órbita circular se relaciona con la velocidad orbital v y la distancia r mediante la siguiente expresión:

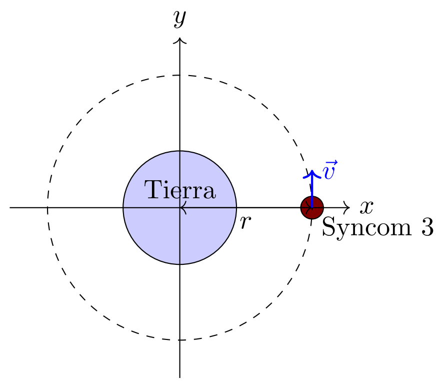
$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi r}{v}.$$

Sustituyendo los valores calculados:

$$T = \frac{2\pi \cdot 4,22 \cdot 10^7 \text{ m}}{3079,51 \text{ m/s}} = 86101,5 \text{ s}.$$

Convertimos el periodo a horas:

$$T = \frac{86101,5 \text{ s}}{3600 \text{ s/hora}} = 23,92 \text{ horas}.$$



Por lo tanto, la velocidad orbital de Syncom 3 es 3079, 51 m/s y su periodo orbital es de 23, 92 horas.

b) **Calcula las energías potencial y cinética del satélite en su movimiento por dicha órbita. Calcula la energía que se debe aportar al satélite para que se sitúe en una órbita en la que su energía mecánica sea $E = -9,5 \cdot 10^7$ J.**

La energía potencial gravitatoria U de un satélite en órbita circular está dada por:

$$E_p = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r}.$$

Sustituyendo los valores:

$$E_p = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 6 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 40\ \text{kg}}{4,22 \cdot 10^7\ \text{m}} = -3,798 \cdot 10^8\ \text{J}.$$

La energía cinética E_c del satélite en órbita se calcula mediante:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2.$$

Sustituyendo los valores:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot 40\ \text{kg} \cdot (3079,51\ \text{m/s})^2 = 1,897 \cdot 10^8\ \text{J}.$$

La energía mecánica total E_m del satélite en órbita es la suma de la energía cinética y la energía potencial:

$$E_m = E_c + E_p = 1,897 \cdot 10^8\ \text{J} - 3,798 \cdot 10^8\ \text{J} = -1,901 \cdot 10^8\ \text{J}.$$

Queremos que la energía mecánica final E_{final} sea:

$$E_{\text{final}} = -9,5 \cdot 10^7\ \text{J}.$$

La energía inicial es:

$$E_{\text{inicial}} = -1,901 \cdot 10^8\ \text{J}.$$

La energía que se debe aportar ΔE es la diferencia entre la energía final y la energía inicial:

$$\Delta E = E_{\text{final}} - E_{\text{inicial}} = -9,5 \cdot 10^7\ \text{J} - (-1,901 \cdot 10^8\ \text{J}) = 1,901 \cdot 10^8\ \text{J} - 9,5 \cdot 10^7\ \text{J} = 9,52 \cdot 10^7\ \text{J}.$$

Por lo tanto, la solución es:

- **La energía potencial gravitatoria del satélite en su órbita es $E_p = -3,798 \cdot 10^8$ J.**
- **La energía cinética del satélite es $E_c = 1,897 \cdot 10^8$ J.**
- **La energía mecánica total del satélite es $E_m = -1,901 \cdot 10^8$ J.**
- **Para que la energía mecánica del satélite sea $E = -9,5 \cdot 10^7$ J, se debe aportar una energía adicional (cinética) de $\Delta E = 9,52 \cdot 10^7$ J.**

Problema 2. Campo Electromagnético

Un ion con carga $q = 3,2 \cdot 10^{-19}$ C, entra con velocidad constante $\vec{v} = 20\ \vec{j}$ m/s en una región del espacio en la que existen un campo magnético uniforme $\vec{B} = -20\ \vec{i}$ T y un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$. Desprecia el campo gravitatorio.

a) **Calcula el valor del vector $\vec{E}$ necesario para que el movimiento del ion sea rectilíneo y uniforme.**

b) **Calcula los vectores fuerza que actúan sobre el ion (dirección y sentido) en esta región del espacio. Representa claramente los vectores, $\vec{v}$, $\vec{B}$, $\vec{E}$ y dichos vectores fuerza.**

Solución:

a) **Calcula el valor del vector $\vec{E}$ necesario para que el movimiento del ion sea rectilíneo y uniforme.**

Para que el ion se mueva de manera rectilínea y uniforme, la suma de las fuerzas que actúan sobre él debe ser igual a cero, según el *Primer Principio de la Dinámica de Newton.* Las fuerzas que actúan sobre el ion son la fuerza eléctrica $\vec{F}_e$ y la fuerza magnética $\vec{F}_m$:

$$\vec{F}_e + \vec{F}_m = 0,$$

donde la fuerza eléctrica es

$$\vec{F}_e = q \cdot \vec{E}$$

y la fuerza magnética (Ley de Lorentz) viene dada por

$$\vec{F}_m = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}).$$

Sustituyendo en la ecuación de equilibrio:

$$q \cdot \vec{E} + q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -(\vec{v} \times \vec{B}).$$

Calculamos el producto vectorial $\vec{v} \times \vec{B}$, siendo

$$\vec{v} = 20\ \vec{j}\ \text{m/s}, \quad \vec{B} = -20\ \vec{i}\ \text{T}:$$

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 20 & 0 \\ -20 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (20 \cdot 0 - 0 \cdot 0)\ \vec{i} - (0 \cdot 0 - (-20) \cdot 0)\ \vec{j} + (0 \cdot 0 - 20 \cdot (-20))\ \vec{k} = 400\ \vec{k}\ \text{N/C}.$$

Por lo tanto, el vector $\vec{E}$ necesario es:

$$\boldsymbol{\vec{E} = -400\ \vec{k}\ \text{N/C}.}$$

b) **Calcula los vectores fuerza que actúan sobre el ion (dirección y sentido) en esta región del espacio. Representa claramente los vectores, $\vec{v}$, $\vec{B}$, $\vec{E}$ y dichos vectores fuerza.**

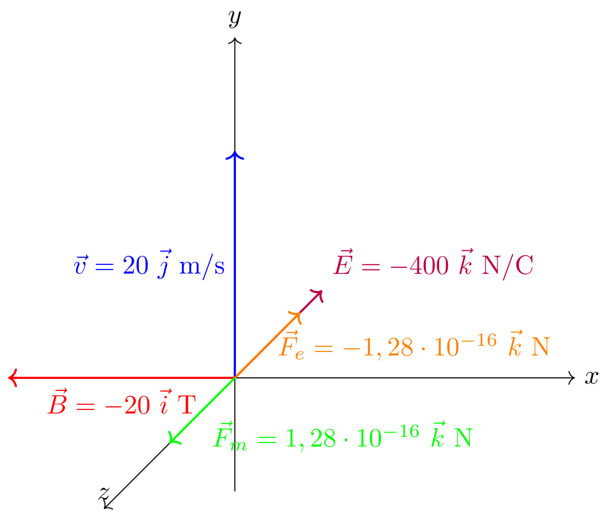
La fuerza eléctrica es:

$$\vec{F}_e = q \cdot \vec{E} = 3,2 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot (-400\ \vec{k}\ \text{N/C}) = -1,28 \cdot 10^{-16}\ \vec{k}\ \text{N}$$

La fuerza magnética es:

$$\vec{F}_m = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = 3,2 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 400\ \vec{k}\ \text{N/C} = 1,28 \cdot 10^{-16}\ \vec{k}\ \text{N}$$

La representación gráfica es como sigue:



Por lo tanto, las fuerzas pedidas son:

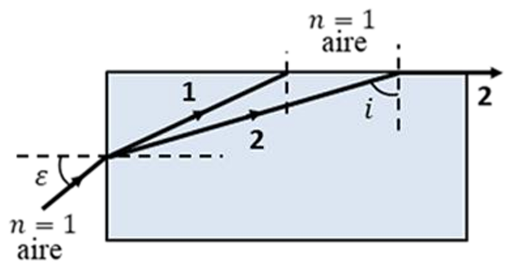
$$\vec{F_e} = -1,28 \cdot 10^{-16}\ \vec{k}\ \text{N}, \quad \vec{F_m} = 1,28 \cdot 10^{-16}\ \vec{k}\ \text{N}.$$

Problema 3. Ondas

Se hace incidir un haz de luz blanca sobre una lámina plano-paralela de un cierto material, cuyo índice de refracción para la luz roja es $n_r = 1,19$ y para la luz violeta $n_v = 1,23$.

a) **Explica qué sucede cuando el rayo incidente de luz blanca entra en la lámina e identifica cuál de los rayos 1 y 2 corresponde al rojo y cuál al violeta. Razona la respuesta en base a la ley física que rige este fenómeno.**

b) **Tras incidir en la cara superior de la lámina, el rayo 2 prosigue paralelo a ella, como se ve en la figura. Determina el ángulo, i, con el que incide sobre esta cara y el ángulo de entrada, $\mathcal{E}$.**



Solución:

a) **Explica qué sucede cuando el rayo incidente de luz blanca entra en la lámina e identifica cuál de los rayos 1 y 2 corresponde al rojo y cuál al violeta. Razona la respuesta en base a la ley física que rige este fenómeno.**

Cuando un haz de luz blanca incide sobre una lámina plano-paralela, cada componente de la luz (espectro visible) refracta de manera diferente debido a la variación del índice de refracción con la longitud de onda. Este fenómeno se conoce como *dispersiones de la luz* y está regido por la *Ley de Snell*:

$$n_1 \cdot \sin(\theta_1) = n_2 \cdot \sin(\theta_2),$$

donde:

- n_1 es el índice de refracción del medio incidente,
- n_2 es el índice de refracción del material de la lámina,
- θ_1 es el ángulo de incidencia,
- θ_2 es el ángulo de refracción.

Dado que el índice de refracción para la luz violeta ($n_v = 1,23$) es mayor que para la luz roja ($n_r = 1,19$), la luz violeta se refracta más que la luz roja al entrar en la lámina. En el diagrama, el rayo 1 que se refracta menos corresponde a la luz *roja* ($n_r = 1,19$), mientras que el rayo 2 que se refracta más corresponde a la luz *violeta* ($n_v = 1,23$).

Por lo tanto, el rayo 1 es la luz roja y el rayo 2 es la luz violeta, dado que la mayor refracción de la luz violeta se debe a su mayor índice de refracción en el material de la lámina, lo que implica que se desvía más de su trayectoria original en comparación con la luz roja.

b) **Tras incidir en la cara superior de la lámina, el rayo 2 prosigue paralelo a ella, como se ve en la figura. Determina el ángulo, i, con el que incide sobre esta cara y el ángulo de entrada, $\mathcal{E}$.**

Para que el rayo 2 (violeta) prosiga paralelo a la lámina tras la refracción en la segunda cara, el ángulo de refracción en esta interfaz debe ser de 90°. Aplicando nuevamente la *Ley de Snell* en la segunda interfaz (salida de la lámina):

$$n_v \cdot \sin(i) = n_1 \cdot \sin(\theta_3).$$

Dado que $\theta_3 = 90°$ (el rayo prosigue paralelo), tenemos:

$$n_v \cdot \sin(i) = n_1 \cdot \sin(90°) \quad \Rightarrow \quad n_v \cdot \sin(i) = n_1 \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad \sin(\theta_2) = \frac{n_1}{n_v} = \frac{1}{1,23} = 0,8130.$$

Entonces,

$$i = \arcsin(0,8130) = 54,39°.$$

Para poder calcular el ángulo de incidencia en la cara lateral ($\mathcal{E}$), debemos calcular primero el ángulo de refracción en dicha cara (α). Para ello, tenemos ne cuenta que se forma un triángulo:

$$\alpha + i + 90° = 180° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 35,61°.$$

Para determinar el ángulo de entrada $\mathcal{E}$ en la primera interfaz, consideramos que el rayo 2 entra en la lámina con este ángulo de refracción. Aplicando nuevamente la *Ley de Snell* en la primera interfaz:

$$n_1 \cdot \sin(\mathcal{E}) = n_v \cdot \sin(\alpha) \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot \sin(\mathcal{E}) = 1,23 \cdot \sin(35,61°) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} = \arcsin(0,7192) = 45,74°.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\begin{cases} \textbf{Ángulo de incidencia sobre la cara superior} & \rightarrow \quad \boldsymbol{i = 54,39°} \\ \textbf{Ángulo de entrada en la lámina} & \rightarrow \quad \boldsymbol{\mathcal{E} = 43,86°} \end{cases}$$

Problema 4. Física Moderna

El ^{222}Rn (radón 222) es un gas radiactivo natural presente en el aire de los espacios cerrados. Se realizan medidas para determinar la masa y la actividad de dicho gas.

a) **Determina la actividad en becquerel de un cierto volumen de aire si la masa de ^{222}Rn que se mide es de $0,02$ pg.**

b) **La actividad medida en otro volumen de aire es de 228 Bq. Si dicho volumen se aísla, y se vuelve a medir al cabo de $11,4$ días ¿Cuánta actividad, debida al ^{222}Rn, se tendrá? ¿Cuánto valdrá la masa de ^{222}Rn correspondiente?**

Datos: periodo de semidesintegración del ^{222}Rn, $T_{1/2} = 3,8$ días; masa de un átomo de ^{222}Rn, $M = 3,7 \cdot 10^{-25}$ kg

Solución:

a) **Determina la actividad en becquerel de un cierto volumen de aire si la masa de ^{222}Rn que se mide es de $0,02$ pg.**

Primero, convertimos la masa de ^{222}Rn a unidades del Sistema Internacional:

$$m = 0,02 \text{ pg} = 0,02 \cdot 10^{-12} \text{ g} = 0,02 \cdot 10^{-15} \text{ kg} = 2,0 \cdot 10^{-17} \text{ kg}.$$

Calculamos el número de átomos de ^{222}Rn en la muestra:

$$N = \frac{m}{M} = \frac{2,0 \cdot 10^{-17} \text{ kg}}{3,7 \cdot 10^{-25} \text{ kg/átomo}} = 5,405 \cdot 10^{7} \text{ átomos}.$$

La constante de desintegración radiactiva λ se relaciona con el período de semidesintegración $T_{1/2}$ mediante:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}.$$

Convertimos el período de semidesintegración a segundos:

$$T_{1/2} = 3,8 \text{ días} \cdot \frac{86\,400 \text{ s}}{1 \text{ día}} = 328\,320 \text{ s}.$$

Calculamos λ:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{328\,320 \text{ s}} = \frac{0,6931}{328\,320 \text{ s}} = 2,111 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}.$$

La actividad A se calcula como:

$$A = \lambda \cdot N = (2,111 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}) \cdot (5,405 \cdot 10^{7}) = 114,1 \text{ Bq}.$$

Por lo tanto, la actividad es de $114,1$ Bq.

b) **La actividad medida en otro volumen de aire es de 228 Bq. Si dicho volumen se aísla, y se vuelve a medir al cabo de $11,4$ días ¿Cuánta actividad, debida al ^{222}Rn, se tendrá? ¿Cuánto valdrá la masa de ^{222}Rn correspondiente?**

La actividad inicial es $A_0 = 228$ Bq. Usamos la ley de desintegración radiactiva:

$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda t}.$$

Calculamos el tiempo transcurrido en segundos:

$$t = 11,4 \text{ días} \cdot \frac{86\,400 \text{ s}}{1 \text{ día}} = 984\,960 \text{ s}.$$

Calculamos el exponente:

$$\lambda t = (2,111 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}) \cdot 984\,960 \text{ s} = 2,079.$$

Entonces, la actividad después de t es:

$$A = 228 \text{ Bq} \cdot e^{-2,079} = 228 \text{ Bq} \cdot 0,1251 = 28,5 \text{ Bq}.$$

Calculamos el número de átomos restantes:

$$N = \frac{A}{\lambda} = \frac{28,5 \text{ Bq}}{2,111 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}} = 1,35 \cdot 10^{7} \text{ átomos}.$$

Calculamos la masa correspondiente:

$$m = N \cdot M = (1,35 \cdot 10^{7} \text{ átomos}) \cdot (3,7 \cdot 10^{-25} \text{ kg/átomo}) = 5 \cdot 10^{-18} \text{ kg}.$$

Por lo tanto, la actividad después de $11,4$ días es $28,5$ Bq y la masa correspondiente de ^{222}Rn es $5 \cdot 10^{-18}$ kg.